

基于迭代解析与数值算法的“板凳龙”运动几何研究

段威呈^a, 杨昊天^b, 刘垚^a

^a 同济大学计算机科学与技术学院

^b 同济大学汽车学院

摘 要

本文在分析“板凳龙”运动问题中,利用牛顿运动学原理分析、坐标变换等方法建立了盘入过程中整个舞龙队等距螺旋线运动的迭代解析模型与碰撞检测方案;对调头过程中更加复杂的运动模型,则通过数值模拟方法,以步长采样与小量微分分析为基础,求得了调头曲线路径坐标位置与速度的精确数值解,并使用 SLSQP 优化算法实现了调头的最优路径规划,另外还使用全局二分迭代搜索算法实现高效的过程最大速度阈值的跟踪与控制。本文最后就以上模型的结果进行了合理性评估与误差分析。

针对问题一:首先,基于等距螺旋线极坐标方程 $\rho = \alpha\theta$ 的运动分解分析及曲线路径积分、切向求导的讨论,构建了对无约束状态下“板凳龙”龙头把手的运动分析模型,并借助板凳刚体连接的严格定距离约束,求解出相邻把手极坐标夹角 θ_p 与 θ_{p+1} 位置递推关系解析式以及与速度递推关系 v_p/v_{p+1} 的解析解,代入尺寸及运动速度数据,得到了在0~300s整个舞龙队的位置和速度结果,详见正文表1、表2及附件result1.xlsx。进一步又使用了微分的方法求出了速度结果的数值逼近解,两种方法的误差分析见正文第六部分。

针对问题二:对问题一中所构建的盘入阶段等距螺旋线运动模型进行模拟推演,进一步对运动的板在靠近旋转中心附近进行局部区域范围的碰撞检测分析,由坐标旋转变换求解“板凳龙”矩形四点坐标,从而可在推演中由矩形边线方程相交关系进行碰撞检测。推演选择一个0.1s的时间步,从而获取到碰撞的点的近邻范围,在临近点附近采用二分迭代方法逼近更精确的碰撞的时刻。最终求得盘入的终止时刻为**412.473838 s**,当前时候的位置及速度见正文表3及附件result2.xlsx。

针对问题三:舞龙队沿不同螺距的等距螺旋线盘入,能够进入调头空间的条件是

在进入调头空间的时候不会发生碰撞，因此最小螺距的临界情况是：沿该螺距运动的龙头在调头空间边缘时恰好碰撞到后续其他板凳。该问题的解决流程同问题二，仍然是在模拟推演过程中进行碰撞检测，并使用二分迭代方式逼近目标。选择推演的时间步为 0.1s，最终求得**最小螺距为 0.417138 m**。

针对问题四：可将问题分解为多段曲线上的运动模型构建与调头路径曲线长度优化两子问题。对于**多段曲线上的复杂运动模型构建问题**，首先根据龙头匀速运动龙头把手的关于时间的运动位置，而相邻把手的距离定长强约束位于多段曲线，难以直接求解析解，因此采用一种基于散点采样拟合的数值求解技巧，取 0.001s 的时间步按顺序采样紧密排布的散点，可以直接在该散点序列上使用二分迭代进行定长距离约束限制的高效递推；对于**调头路径曲线长的优化问题**，依据几何关系计算长度，并约束开始调头和结束调头的都位于调头空间内，使用序列最小二乘规划（SLSQP）方法求解该非线性约束优化问题，求得 S 曲线圆的半径大小分别为 **3.005418 m** 与 **1.502709 m**，调头开始与结束**两个位置均恰好位于刚刚进入调头空间的边缘**，因此该情况下**缩小 S 曲线圆半径不能再使调头路径曲线变短**，正文第六部分将对此给予更加直观的定性解释。-100 s~100 s 舞龙队运动位置与速度见正文表 4、表 5 及附件 result4.xlsx。

针对问题五：使用问题四中散点采样的数值方法求解不同龙头速度控制下，每个位置在全过程中的最大速度，对最大速度进行网格化搜索，在接近 2m/s 的网格邻域内继续使用二分迭代逼近近似解，求得**龙头最大速度上限为 1.384527m/s**。

关键词：解析运动几何 数值分析方法 二分迭代算法 SLSQP 约束优化

1

2

1. 问题重述

3

1.1. 问题背景

4

5

6

7

“板凳龙”是一种源自浙闽地区的传统民俗文化活动，参与者将多条板凳首尾相连，形成一条蜿蜒的“龙”。这种活动不仅考验舞龙队伍的协作能力，也展现了民间艺术的独特魅力。为了提高观赏性和舞龙的效率，有必要研究如何在有限的空间内，使板凳龙更加灵活地盘旋和移动。

8

1.2. 问题提出

9

10

11

12

在本文中，我们需要对一个由 223 节板凳组成的板凳龙进行数学分析。该板凳龙的结构包括一个特殊的龙头（长度为 341 厘米），221 节相同的龙身（每节长度为 220 厘米），以及一个标准的龙尾（同样长度为 220 厘米）。所有板凳的宽度均为 30 厘米，并且每节板凳两端都有用于连接下一节板凳的孔洞。建立模型解决以下问题：

13

14

问题一：模拟舞龙队沿螺线盘入的过程，计算从初始状态到 300 秒内每秒钟各板凳把手的位置和速度，并提供关键时间点的信息。

15

16

问题二：继续上述情景，确定舞龙队完全停止盘旋（即板凳之间开始接触或碰撞）的具体时刻，并记录该时刻舞龙队的位置与速度信息。

17

18

19

问题三：在从顺时针盘转向逆时针盘旋的过程中，舞龙队需要进入一个以螺旋线中心为圆心、直径为 9 米的圆形区域内完成调头动作。我们需要找到最小的螺距，使得龙头可以在不改变速度的情况下顺利进入这个圆形区域。

20

21

问题四：设计最短的调头路径，由两段圆弧组成的 S 形曲线，计算从调头开始前 100 秒到完成后的每秒钟位置和速度，并优化圆弧曲率半径与位置。

22

23

24

问题五：在已知条件下，舞龙队按照设定路径行进，龙头的速度保持恒定。我们需要确定龙头的最大可行速度，确保舞龙队其他部分的速度不会超过 2 米/秒的安全阈值。

25

2. 问题分析

26

2.1. 问题一分析：

27

28

29

30

考虑到板凳龙龙身较长，而除龙头外各板的几何参数相同，且均在同一已知曲线上运动，运动特征相似。则为了求解所需的大量板凳在不同时间的位置和速度参数，可以考虑任取某一板凳作前后位置的分析，求出其迭代关系的解析式，而后以龙头为迭代起点进行迭代求解。

31

32

33

34

另外，也可以在迭代解得位置后利用数值微分法求解其速度的数值解。此种方法可行性高，但是精度不稳定；而解析法的精度较高，但是解析式的计算和逻辑问题可能难以察觉。可以考虑在建模求解部分采取解析法分析，而后在模型的验证部分采用数值法进行对照，以此来证明解析的正确性。

35

2.2. 问题二分析：

36

37

38

39

40

41

问题二需要完成的核心任务在于碰撞的判断与临界求解。在对碰撞进行分析时，同样有两种方案：一种为直接取碰撞的临界条件，求解碰撞板临界位置，再结合问题一中完成的迭代关系导出其他参数；另一种则需要构建板凳龙的运动仿真模型，同时引入板凳矩形的几何碰撞判定，求解一定精度下的数值解。前者可以用来分析较为简单的碰撞，而对于运动过程中变量较多的碰撞，则可以优先选择效率更高、可读性更强的后者。

42

43

44

另外，在盘入过程中，龙头总是位于曲率半径更小的内圈，且龙头板件的长度相较于龙身更长，因此更容易发生碰撞。因此，对于板凳龙的碰撞问题可以直接对龙头是否发生碰撞进行判定，以此来减少计算量。

45

2.3. 问题三分析：

46

47

48

问题三可以作为问题二的逆问题来解答。在问题二中，我们已知螺距，要求龙头发生碰撞的临界位置；而问题三的求解则是已知龙头位置，要求临界螺距。则可以对第二问中构建的算法补充对螺距的遍历后运行直至满足临界条件以求得最终解。

49

2.4. 问题四分析：

50

问题四的本质为在一定的约束条件下，对调头区内路径的总行程长度进行优化。

51 则可以考虑先通过几何与向量分析等方法给出约束条件方程以及最终待优化的目标
52 方程的表达式，随后选取合适的优化算法进行最小值求解。对于求解得到的最小值再
53 进行碰撞检测，若无碰撞，则该结果即为最短调头路径，在指定调头区内无法再缩短
54 行程长度。

55 在得到路径曲线的解析式后，我们可以考虑如问题一一样求解速度位置的解析迭
56 代式，也可以考虑直接采取数值算法求解。这部分的方案选择取决于最终路径曲线方
57 程的复杂程度。若较为复杂，则可以考虑直接构建运动分析算法进行数值求解以提高
58 问题求解效率。

59 2.5. 问题五分析：

60 问题五可以作为问题四的逆问题进行解答。在问题四解答完成后，理论上我们将
61 获得行程中的速度分布迭代关系或者可以用来求解速度分布的数值算法。对其进行二
62 分法迭代直至速度峰值为 $2m/s$ ，此时的龙头速度即为问题五的答案。

63

64

3. 模型假设

- 65 1. 舞龙队的操作完全按照模型进行，忽略人为操作可能带来的误差。
- 66 2. 认为所涉及的几何形状均为理想几何，忽略实际物件几何的偏差
- 67 3. 不考虑板凳的厚度，认为板凳间碰撞可能发生在任意两个非相邻板凳之间
- 68 4. 把手为完美圆柱体，无粗细变化

69

70

4. 符号说明

符号	说明	单位
D_0	龙头的长度	m
D	龙身的长度	m
H	板凳的宽度	m
d	把手孔径	m
h	把手孔距离最近的板头的距离	m

v	龙头的速度	m/s
t	龙头的运动时间	s
$pitch$	等距螺线的螺距	m
θ_i	板凳位置 <i>i</i> 上两个把手与原点连线的夹角	rad
r_i	等距螺线上 <i>i</i> 位置处与原点的距离	m
Θ	把手与原点连线的旋转角微元	rad
σ	板凳的旋转倾斜角	rad
ρ	曲率半径	m
Ω_i, Ω	调头路径第 <i>i</i> 段的长度、调头路径的总长	m
Φ_{AB}	直线 AB 的倾角	rad
ϵ_i	调头路径所对圆周角	rad

71

72

5. 模型的建立与求解

73

5.1. 等距螺线方程的建立

74

考虑到本题中所有的运动都以等距螺线为轨迹，故在正式讨论实际问题前，也要先对螺线方程模型进行明确。首先给出等距螺线的极坐标方程与直角坐标转换方程：

75

76

$$\rho = \alpha\theta \quad (1)$$

77

$$\alpha = \frac{pitch}{2\pi} \quad (2)$$

78

$$x = \rho\cos\theta = \alpha\theta\cos\theta \quad (3)$$

79

$$y = \rho\sin\theta = \alpha\theta\sin\theta \quad (4)$$

80

其中， $pitch$ 为螺线的螺距。

81

进一步地，可以通过对圆弧的极限求导得到线速度和转角对时间导数的关系，有：

82

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{dt}\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} \frac{d\theta}{dt} = \alpha\sqrt{1 + \theta^2} \frac{d\theta}{dt} \quad (5)$$

83

对于螺线而言，其合速度可以分解为切向分速度和法向分速度，由于顺时针旋入，

84

其方向向量有：

85

$$\vec{e}_t = [\alpha\theta\sin\theta, -\alpha\theta\cos\theta] \quad (6)$$

86

$$\vec{e}_n = (\alpha\cos\theta, \alpha\sin\theta) \quad (7)$$

87 此后所有的有关计算均以上式为参考。

88 5.2. 问题一模型的建立与求解

89 5.2.1. 空间位置迭代模型的建立与求解

90 5.2.1.1. 龙头位置的确定

91 由于 5.2 中导出了转角与直角坐标的转换关系，求解板凳龙上任意一点的位置问
92 题可转化为求解该点对应螺线的转角问题。由于龙头的速度和运动时间确定，我们首
93 先求解龙头的位置，即对方程(5)在整个运动时间上积分：

$$94 \int_{\theta_0}^{\theta_t} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \frac{2\pi v}{pitch} \int_0^t dt$$

$$95 \Rightarrow \left(\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right) \Big|_{\theta_0}^{\theta_t} = \frac{2\pi}{pitch} vt$$

$$96 \Rightarrow \frac{\theta_t}{2} \sqrt{\theta_t^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \left| \theta_t + \sqrt{\theta_t^2 + 1} \right| = \frac{2\pi}{pitch} vt + \frac{\theta_0}{2} \sqrt{\theta_0^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \left| \theta_0 + \sqrt{\theta_0^2 + 1} \right| \quad (8)$$

97 在方程(8)中代入运动时间与速度即得龙头转角，进一步利用方程(3)和(4)转换直
98 角坐标即可得到其位置。如不做特殊说明，此后所有龙头位置的求解均利用该方法实
99 现。

100 5.2.1.2. 龙身位置的确定

101 进一步地，为了求得其他板凳的位置转角，我们考虑任取某一龙身板凳进行抽象
102 处理分析其迭代关系。对于如图 1 所示的三角形，有余弦定理及其辅助方程：

$$103 D^2 = r_{p+1}^2 + r_p^2 - 2r_p r_{p+1} \cos \Delta\theta \quad (9)$$

$$104 r_i = \theta_i \cdot \alpha \quad (10)$$

$$105 \Delta\theta = \theta_{i+1} - \theta_i \quad (11)$$

106 其中， D 为龙身的长度； r_i 为位置 i 到旋转中心的距离。

107 联立方程(9)~(11)，可以得到**转角的递推方程**：

$$108 \theta_p^2 + \theta_{p+1}^2 - 2\theta_p \theta_{p+1} \cos(\theta_{p+1} - \theta_p) = \frac{D^2}{\alpha^2} \quad (12)$$

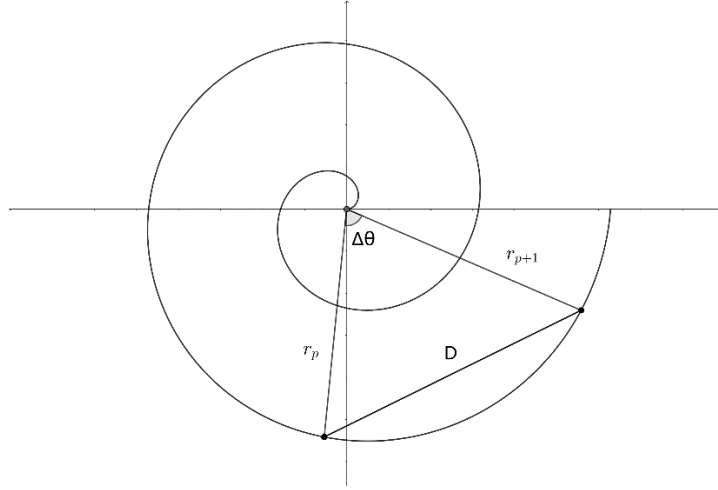


图 1: 板凳位置分析三角形

5.2.2. 运动过程迭代模型的建立

为了导出任意位置的速度关系，我们取如图 2 所示时间微元前后的运动三角形进行几何分析。有余弦定理：

$$\begin{cases} D^2 = r_p^2 + r_{p+1}^2 - 2r_p r_{p+1} \cos(\theta_{p+1} - \theta_p) \\ D^2 = r_p'^2 + r_{p+1}'^2 - 2r_p' r_{p+1}' \cos(\theta_{p+1} - \theta_p) \end{cases} \quad (13)$$

引入辅助方程组：

$$r_i = \alpha \theta_i \quad (14)$$

$$r_i' = \alpha(\theta_i - \Theta_i) \quad (15)$$

$$\begin{cases} \Theta_{p+1} = d\theta_{p+1} = \beta \\ \Theta_p = d\theta_p = \gamma\beta \end{cases} \quad (16)$$

其中， Θ_i 是把手位置 i 与原点连线的旋转角微元。

联立可得：

$$2\alpha^2\beta[\theta_p + \gamma\theta_{p+1} - (\gamma\theta_p + \theta_{p+1})\cos(\theta_{p+1} - \theta_p + (1-\gamma)\beta)]$$

$$= 2\alpha^2\theta_p\theta_{p+1}[\cos(\theta_{p+1} - \gamma\beta) - \cos\theta_{p+1} + (1-\gamma)\beta]$$

$$\Rightarrow \beta[\theta_p + \gamma\theta_{p+1} - (\gamma\theta_p + \theta_{p+1})\cos(\theta_{p+1} - \theta_p + (1-\gamma)\beta)]$$

$$= \theta_p\theta_{p+1}[\cos(\theta_{p+1} - \gamma\beta) - \cos\theta_{p+1} + (1-\gamma)\beta]$$

约去小量 $(1-\gamma)\beta$ ，并对余弦项作泰勒展开

$$\Rightarrow \beta[\theta_p + \gamma\theta_{p+1} - \gamma\theta_p\cos(\theta_{p+1} - \theta_p) - \theta_{p+1}\cos(\theta_{p+1} - \theta_p)]$$

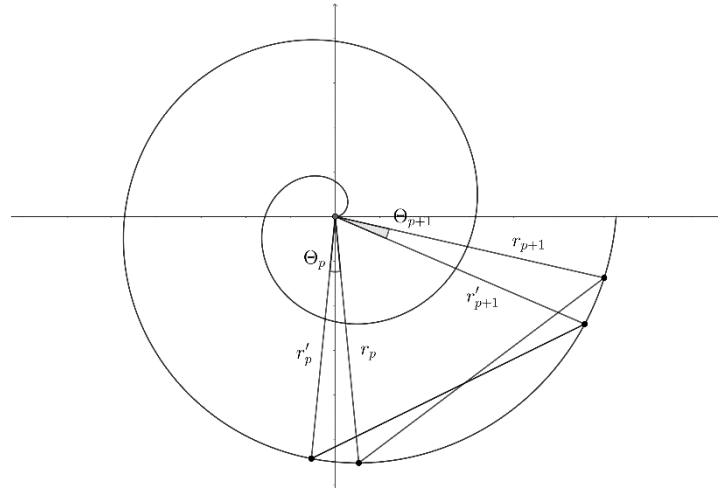
$$= \beta[\theta_p\theta_{p+1}\sin(\theta_{p+1} - \theta_p) - \gamma\theta_p\theta_{p+1}\sin(\theta_{p+1} - \theta_p)]$$

128
$$\Rightarrow \gamma = \frac{\theta_p \theta_{p+1} \sin(\theta_{p+1} - \theta_p) + \theta_{p+1} \cos(\theta_{p+1} - \theta_p) - \theta_p}{\theta_{p+1} - \theta_p \cos(\theta_{p+1} - \theta_p) + \theta_p \theta_{p+1} \sin(\theta_{p+1} - \theta_p)} \quad (17)$$

129 又由式(5)和(16)，对相邻的两个速度表达式做比值即可得到速度的递推关系式：

130
$$\frac{v_{p+1}}{v_p} = \frac{\sqrt{1 + \theta_{p+1}^2}}{\sqrt{1 + \theta_p^2}} \cdot \frac{d\theta_{p+1}}{d\theta_p} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\sqrt{1 + \theta_{p+1}^2}}{\sqrt{1 + \theta_p^2}}$$

131
$$= \frac{\theta_{p+1} - \theta_p \cos(\theta_{p+1} - \theta_p) + \theta_p \theta_{p+1} \sin(\theta_{p+1} - \theta_p)}{\theta_p \theta_{p+1} \sin(\theta_{p+1} - \theta_p) + \theta_{p+1} \cos(\theta_{p+1} - \theta_p) - \theta_p} \cdot \frac{\sqrt{1 + \theta_{p+1}^2}}{\sqrt{1 + \theta_p^2}} \quad (18)$$



132
133 图 2：板凳运动分析三角形

134 至此，我们已经完全完成了位置和速度迭代模型的建立。求解时利用 Python 编写
135 迭代程序，首先以龙头转角为迭代起点，在每一个迭代内求解方程(12)的根，即为每
136 一点的转角。进一步利用方程(3)和(4)即可得到每一点的位置。需要注意的是，第一组
137 迭代时D应取D₀。接下来利用得到的转角对方程(18)进行迭代，即可得到每一点的速度
138 大小。问题一求解完毕，部分结果如表 1 与表 2 所示：

139
140
141

表 1:问题一所求部分节点位置表

	0s	60s	120s	180s	240s	300s
龙头 x(m)	8.800000	5.799209	-4.084887	-2.963609	2.594494	4.420274
龙头 y(m)	-0.000000	-5.771092	-6.304479	6.094780	-5.356743	2.320429
第 1 节龙身 x(m)	8.363824	7.456758	-1.445473	-5.237118	4.821221	2.459489

第 1 节龙身 y(m)	2.826544	-3.440399	-7.405883	4.359627	-3.561949	4.402476
第 51 节龙身 x(m)	-9.518732	-8.686317	-5.543150	2.890455	5.980011	-6.301346
第 51 节龙身 y(m)	1.341137	2.540108	6.377946	7.249289	-3.827758	0.465829
第 101 节龙身 x(m)	2.913983	5.687116	5.361939	1.898794	-4.917371	-6.237722
第 101 节龙身 y(m)	-9.918311	-8.001384	-7.557638	-8.471614	-6.379874	3.936008
第 151 节龙身 x(m)	10.861726	6.682311	2.388757	1.005154	2.965378	7.040740
第 151 节龙身 y(m)	1.828753	8.134544	9.727411	9.424751	8.399721	4.393013
第 201 节龙身 x(m)	4.555102	-6.619664	-10.627211	-9.287720	-7.457151	-7.458662
第 201 节龙身 y(m)	10.725118	9.025570	1.359847	-4.246673	-6.180726	-5.263384
龙尾 (后) x(m)	-5.305444	7.364557	10.974348	7.383896	3.241051	1.785033
龙尾 (后) y(m)	-10.676584	-8.797992	10.843473	7.492370	9.469336	9.301164

142

143

表 2:问题 1 所求部分节点速度表

	0s	60s	120s	180s	240s	300s
龙头(m/s)	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
第 1 节龙身(m/s)	0.999971	0.999961	0.999945	0.999917	0.999858	0.999709
第 51 节龙身(m/s)	0.999742	0.999662	0.999538	0.999331	0.998941	0.998064
第 101 节龙身(m/s)	0.999575	0.999453	0.999269	0.998971	0.998435	0.997302
第 151 节龙身(m/s)	0.999448	0.999299	0.999078	0.998727	0.998114	0.996861
第 201 节龙身(m/s)	0.999348	0.999180	0.998935	0.998551	0.997893	0.996574
龙尾 (后) (m/s)	0.999311	0.999136	0.998883	0.998489	0.997816	0.996477

144

5.3. 问题二模型的建立与求解

145

5.3.1. 碰撞情况的分析与初步排除

146

从本问题开始,我们需要考虑运动过程中是否存在碰撞,以及求解碰撞带来的极

147

限问题。潜在的碰撞风险来源于两个方面:1. 板凳之间的碰撞;2. 板凳与把手的碰撞。

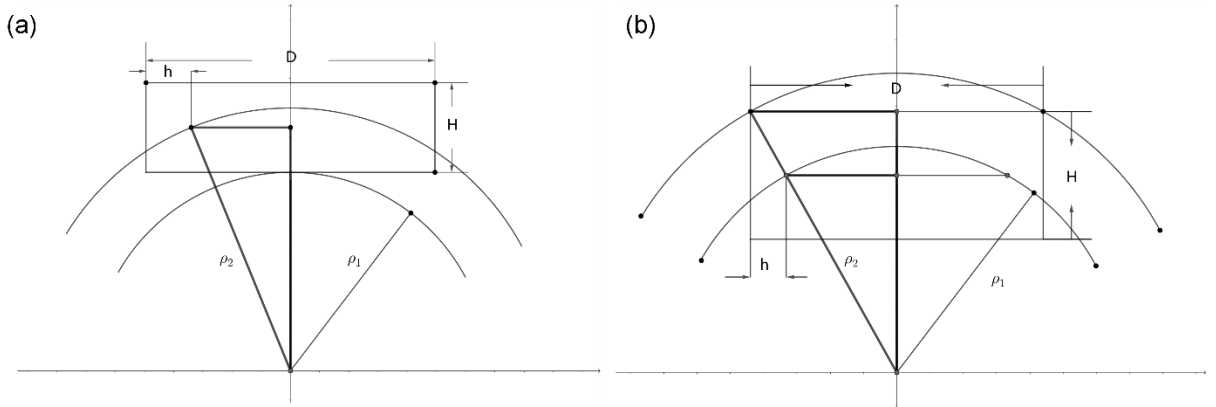
148

我们首先对第二种碰撞的可能性进行初步分析。

149 板凳与把手的碰撞首先发生在相邻两周轨迹内，为简化分析，我们假定轨迹均为
 150 同心圆，对可能碰撞的临界最大曲率半径如图 3 所示进行几何分析，有内碰撞和外碰
 151 撞两组方程：

$$152 \quad \rho_1^2 + \left(\frac{D}{2} - H\right)^2 = (\rho_1 + pitch)^2 \quad (19)$$

$$153 \quad \frac{D/2}{\rho'_1 + pitch} = \frac{1}{4} \frac{D - 2H}{\rho'_1} \quad (20)$$



154

155 图 3：板凳与把手碰撞临界分析；(a)内碰撞临界情况;(b)外碰撞临界情况。

156 其中， ρ_1 为内碰撞发生的最大临界曲率半径； ρ'_1 为外碰撞发生的最大临界曲率半
 157 径。

158 分别解得发生该种碰撞的临界曲率半径约为 34cm 和 0.125cm。考虑到实际螺线
 159 在最内圈的最大曲率半径为 55cm，在运动过程中，板凳与把手的碰撞几乎是不可能
 160 的，因此可以先考虑板凳之间的碰撞。若该碰撞发生在第一周以外，则不必再考虑板
 161 凳与把手的碰撞。

162 5.3.2. 板凳间的碰撞模型建立

163 由于板凳间碰撞设计复杂的解析几何，我们考虑在计算机中构建恰当的算法对板
 164 凳的运动进行模拟，并对是否发生碰撞进行判断。首先对板凳矩形几何所涉及的坐
 165 标关系进行建模。定义板凳的前端端点分别为 A_1 和 A_2 ，后端端点分别为 B_1 和 B_2 ，且 1
 166 号位置总在外侧；定义前后把手分别为 P_1 和 P_2 。其几何与旋转关系如图 4 所示，有：

167 相对坐标系中四点的坐标：

$$\begin{cases} A_1 \left(x_{p1} + h, y_{p1} + \frac{H}{2} \right) \\ A_2 \left(x_{p1} + h, y_{p1} - \frac{H}{2} \right) \\ B_1 \left(x_{p2} - h, y_{p2} + \frac{H}{2} \right) \\ B_2 \left(x_{p2} - h, y_{p2} - \frac{H}{2} \right) \end{cases} \quad (21)$$

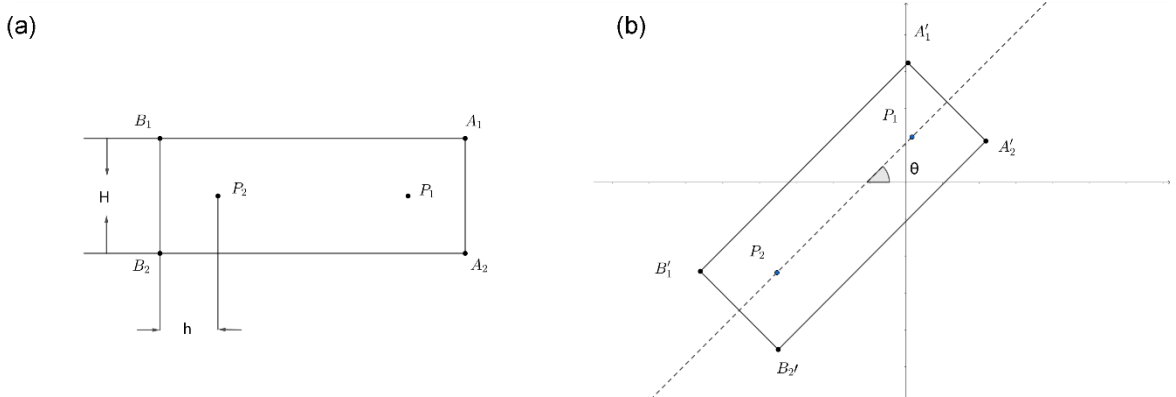
169 板凳的相对旋转倾角与旋转矩阵:

$$170 \quad \sigma = \arctan \left(\frac{y_{p1} - y_{p2}}{x_{p1} - x_{p2}} \right) \quad (22)$$

$$171 \quad M = \begin{bmatrix} \cos\sigma & \sin\sigma \\ -\sin\sigma & \cos\sigma \end{bmatrix} \quad (23)$$

172 则可得旋转 σ 后四点在绝对坐标系中的坐标转换公式:

$$173 \quad \begin{cases} \overrightarrow{P_1A'_1} = \overrightarrow{P_1A_1} \cdot M & \overrightarrow{OA'_1} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1A_1} \cdot M \\ \overrightarrow{P_1A'_2} = \overrightarrow{P_1A_2} \cdot M & \overrightarrow{OA'_2} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1A_2} \cdot M \\ \overrightarrow{P_2B'_1} = \overrightarrow{P_2B_1} \cdot M & \overrightarrow{OB'_1} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2B_1} \cdot M \\ \overrightarrow{P_2B'_2} = \overrightarrow{P_2B_2} \cdot M & \overrightarrow{OB'_2} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2B_2} \cdot M \end{cases} \quad (24)$$



174

175 图 4: 板凳的解析几何分析: (a) 板凳的基本几何示意; (b) 板凳的旋转变换示意。

176 进一步地, 我们可以搭建碰撞检测算法。首先对所有矩形进行编号, 设编号为 p 的
 177 矩形四边的线段构成集合 $Rec(p)$, 编号(0~222)的所有矩形四边的线段构成集合 M 。
 178 其算法结构如下所示:

179

180

181

算法 1: 碰撞检测算法

1: 输入: 所有板凳矩形编号为(0~222);

- 2: 遍历 M ，依次取 $Rec(i)$ ， $i = 0, 1, \dots, 222$ ；
- 3: 记录相邻矩形的编号分别为 $p_{\{last\}} = \max\{i - 1, 0\}$ 和 $p_{\{next\}} = \min\{i + 1, 222\}$ ；
- 4: 遍历 $M = \{Rec(p_{\{last\}}), Rec(p_{\{next\}}), R(i)\}$ ；
- 5: 依次取出 $Rec(j)$ ，判断 $Rec(i) \cap Rec(j) \neq \emptyset$ 是否成立；
- 6: 如果第 5 行判断 True，输出：“发生碰撞”；
- 7: 如果第 5 行判断 False，判断是否完成遍历；
- 8: 如果未完成遍历，跳转到第 4 行继续遍历，否则输出：“不发生碰撞”；

182 由于该算法以及相关辅助方程的推导过程并未涉及任何特殊位置假设，该碰撞判
 183 定算法可以适用于本问题框架下的所有碰撞分析。即对于任一运动时刻，依照此算法
 184 编译并运行程序，即可得到该时刻是否存在碰撞。

185 5.3.3. 盘龙终止时刻状态的求解

186 至此，我们完成了所有前置方程及算法的推导。对于以 Δt_1 为时步的离散时间序列
 187 $T_1(t_0, t_1, \dots, t_n)$ 分别按照递推公式计算龙头与各把手转角、位置及速度大小，并在每个
 188 时刻进行碰撞检测，在这里取时间步 $\Delta t = 0.1s$ 进行推演，当累计时间步到达 t_p 发生第
 189 一次碰撞。即在 $(t_p - \Delta t, t_p)$ 的时刻发生碰撞。

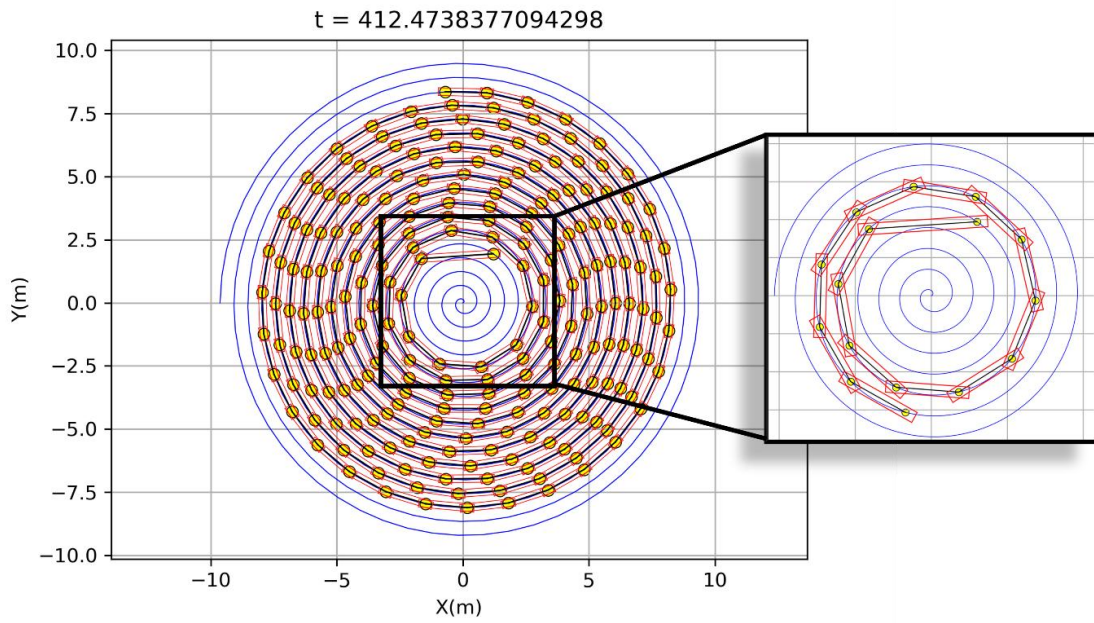
190 为了逼近 $(t_p - \Delta t, t_p)$ 范围内碰撞时间的真实数值，使用二分迭代逼近的方法完成
 191 精确值的求解，令：

$$192 \quad \begin{cases} t_m = t_p - \Delta t \\ t_n = t_p \end{cases} \quad (25)$$

193 更新 t_m 和 t_n ：

$$194 \quad \begin{cases} t_m = \frac{(t_m + t_n)}{2}, \text{该时刻会发生碰撞} \\ t_n = \frac{(t_m + t_n)}{2}, \text{该时刻不会发生碰撞} \end{cases} \quad (26)$$

195 在 Python 中编译如上所述的程序进行运算，得到**最终的终止时刻为 412.473838**
 196 **秒**。此时板凳龙状态如图 5 所示；板凳龙上部分节点的位置与速度如表 3 所示：



197
198
199

图 5
表 3

	位置		速度
龙头 x(m)	1.209931	龙头(m/s)	0.999999
龙头 y(m)	1.942784		
第 1 节龙身 x(m)	-1.643792	第 1 节龙身(m/s)	0.991547
第 1 节龙身 y(m)	1.753399		
第 51 节龙身 x(m)	1.281201	第 51 节龙身(m/s)	0.976852
第 51 节龙身 y(m)	4.326588		
第 101 节龙身 x(m)	-0.536246	第 101 节龙身(m/s)	0.974544
第 101 节龙身 y(m)	5.880138		
第 151 节龙身 x(m)	0.968840	第 151 节龙身(m/s)	0.973602
第 151 节龙身 y(m)	-6.957479		
第 201 节龙身 x(m)	-7.893161	第 201 节龙身(m/s)	0.973090
第 201 节龙身 y(m)	-1.230764		
龙尾 (后) x(m)	0.956217	龙尾 (后) (m/s)	0.972932
龙尾 (后) y(m)	8.322736		

200

201 5.4. 问题三模型的建立与求解

202 两问题所使用的基本模型一致，问题三可视作问题二的反解。我们首先求解调头
203 区的边界点，有方程：

204
$$2\alpha\theta = 9 \tag{27}$$

205 因此取 $\theta = \frac{4.5}{\alpha} = \frac{9\pi}{pitch}$ ，根据进入调头空间前不碰撞的要求，必然应当有龙头此时
206 不与其他板凳碰撞，因此当 $pitch$ 取最小螺距条件下，龙头应当恰好发生第一次碰撞，
207 从而可以反解最小螺距。

208 对于整个模拟过程，取推演的螺距变化步长为 $\Delta pitch = 0.02m$ ，顺序向前逼近可以
209 取得相应步长宽幅下的碰撞店范围。推演得 $pitch_0 = 0.4179999 m$ 时候发生碰撞，即真实
210 的最小螺距取值位于 $(pitch_0, pitch_0 + \Delta pitch)$ 之间；

211 进一步使用二分法逼近最小螺距的精确数值。令：

212
$$\begin{cases} pitch_m = pitch_0 \\ pitch_n = pitch_0 + \Delta pitch \end{cases} \tag{28}$$

213 更新 $pitch_m$ 以及 $pitch_n$ ：

214
$$\begin{cases} pitch_m = \frac{(pitch_m + pitch_n)}{2}, \text{该螺距下会发生碰撞} \\ pitch_n = \frac{(pitch_m + pitch_n)}{2}, \text{该螺距下不会发生碰撞} \end{cases} \tag{29}$$

215 在 $(pitch_m, pitch_n)$ 内重复求解迭代直到精度达到要求，停止迭代。得到最终最小
216 满足要求的螺距为 **0.417138 m**。取该螺距下，板凳龙头碰撞临界状态如图 6 所示，可
217 以恰好旋入调头区。

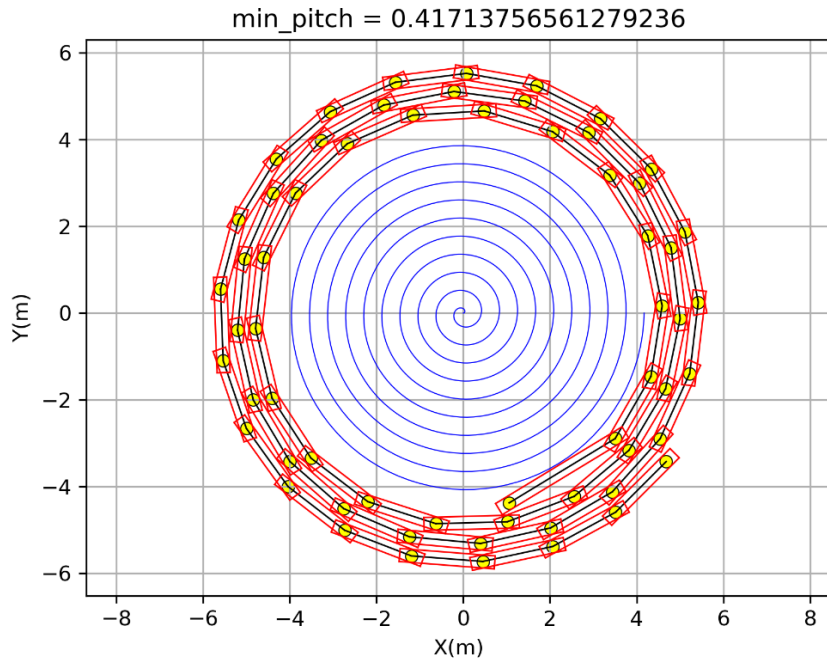


图 6: 龙头恰好可旋入调头区的临界情况示意

218

219

220 •

221 5.5. 问题四模型的建立与求解

222 5.5.1. 盘出曲线的建模

223 从本问开始, 我们需要考虑板凳龙的盘出路径。由中心对称可以推断盘出路线与
224 盘入路线互为“蚊香线”, 有参数方程及其极坐标方程与直角坐标转换方程:

225
$$\rho = -\alpha\theta \quad (30)$$

226
$$\alpha = \frac{pitch}{2\pi} \quad (31)$$

227
$$x = \rho\cos\theta = -\alpha\theta\cos\theta \quad (32)$$

228
$$y = \rho\sin\theta = -\alpha\theta\sin\theta \quad (33)$$

229 另外, 为后续分析方便, 在此补充对螺线的曲率半径推导过程。如图 8 所示取螺
230 线上任意一点的轨迹微元进行速度分析, 记 β 为速度矢量和极轴的夹角, a 为其加速度,
231 有:

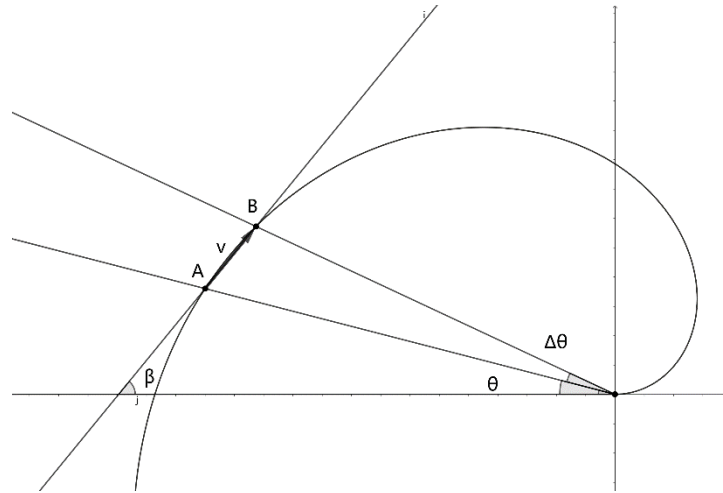
232
$$\beta = \theta + \arctan(\theta) \quad (34)$$

233
$$\frac{d\beta}{dt} = \left[1 + \frac{1}{1 + \theta^2} \right] \frac{d\theta}{dt} \quad (35)$$

234
$$a = v \cdot \frac{d\beta}{dt} = v^2 \frac{\theta^2 + 2}{\alpha(\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (36)$$

235
$$\rho = \frac{v^2}{a} = \frac{\alpha(\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\theta^2 + 2} \quad (37)$$

236 方程(37)即为螺线上任意一点的曲率半径表达式。



237

238

图 7: 螺线上任意一点曲率半径的推导示意

239

5.5.2. 调头路径的优化问题建模

240

首先对优化模型的约束方程与目标方程进行明确。设 θ_1 为调头开始点的转角，

241

位于盘入螺线上； θ_2 调头结束点的转角，位于盘出螺线上， ρ_1 和 ρ_2 代表构成 S 形曲

242

线的两圆的半径，即题中共有 4 个待优化变量。

243

并通过 2 个等式约束以及 6 个不等式约束限制待优化变量的取值：

244
$$\text{constr.} \begin{cases} (|O_1O_2|)^2 = (\rho_1 + \rho_2)^2 \\ \rho_1 = 2\rho_2 \\ \rho_1 > \rho_2 > 0 \\ \theta_1 > 0; \theta_2 > 0 \\ 2\alpha\theta_1 < 9; 2\alpha\theta_2 < 9 \end{cases} \quad (38)$$

245

对以上约束方程含义进行说明：两圆需要保证相切，且半径比为 2:1；此外优化

246

变量均须大于 0，并且调头开始以及调头结束位置均应当位于调头区圆内。

247

龙头在调头区内部的总行程可表示为待优化的目标方程，由三部分构成：

248

1.由盘入螺线切入调头轨迹行程：

249
$$s_1 = \int_{t_{01}}^{t_1} v dt \quad (39)$$

250 2. 在 S 形调头轨迹上的行程（在调头轨迹内两圆弧的旋转角分别为 ϵ_1 、 ϵ_2 ）：

251
$$s_2 = \rho_1 \epsilon_1 + \rho_2 \epsilon_2 \quad (40)$$

252 3. 由调头轨迹切入盘出螺线到走出调头区的行程：

253
$$s_3 = \int_{t_2}^{t_{02}} v dt \quad (41)$$

254 将 s_1 和 s_3 合并处理，记作 Ω_1 ，并记 s_2 为 Ω_2 ，则待优化目标方程的完整表达为：

255
$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 = \left(\int_{t_{01}}^{t_1} v dt + \int_{t_2}^{t_{02}} v dt \right) + (\rho_1 \epsilon_1 + \rho_2 \epsilon_2) \quad (42)$$

256 综上，问题转化为求解在非线性方程组(38)约束下的目标方程(42)的最小值问
257 题。

258 另外特别声明，上式中角标为 01 代表调头区的切入点相关量；角标 02 代表调
259 头区切出点相关量。此后在调头线的讨论中，如无特殊说明，角标为1即代表该物理
260 量与调头开始点有关，角标为2即代表与调头结束点有关。

261 5.5.1. 调头路径的优化问题求解

262 在对方程优化前，首先要求解方程中的各个参量。对于调头路径的曲率中心位
263 置，先明确曲线上切向与法向的单位向量，有曲线微元：

264
$$\begin{cases} dx = \alpha(\cos\theta - \theta\sin\theta) \\ dy = \alpha(\sin\theta + \theta\cos\theta) \end{cases} \quad (43)$$

265 则切线与法线斜率有：

266
$$k_{\vec{e}_t} = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta} \quad (44)$$

267
$$k_{\vec{e}_n} = -\frac{dx}{dy} = \frac{\theta\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \theta\cos\theta} \quad (45)$$

268 则切向的单位向量：

269
$$\vec{e}_{n1} = \left(\frac{\theta_1 \sin\theta_1 - \cos\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + 1}}, -\frac{\sin\theta_1 + \theta_1 \cos\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + 1}} \right) \quad (46)$$

270
$$\vec{e}_{n2} = \left(-\frac{\theta_2 \sin\theta_2 - \cos\theta_2}{\sqrt{\theta_2^2 + 1}}, \frac{\sin\theta_2 + \theta_2 \cos\theta_2}{\sqrt{\theta_2^2 + 1}} \right) \quad (47)$$

271 为了导出圆弧曲率中心坐标，我们如图 8 所示对切点处的速度进行同样的向量
 272 分析。仍取 β 为速度矢量和极轴的夹角，记切点为 $S(x_0, y_0)$ ，则由图 8 所示几何关系
 273 可导出曲率中心的坐标为：

$$274 \quad \overrightarrow{OO_1} = (x_0 - \rho_1 \sin\beta_1, y_0 - \rho_1 \sin\beta_1)$$

$$275 \quad = \left(\alpha\theta_1 \cos\theta_1 - \rho_1 \frac{\sin\theta_1 + \theta_1 \cos\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + 1}}, \alpha\theta_1 \sin\theta_1 - \rho_1 \frac{\theta_1 \sin\theta_1 - \cos\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + 1}} \right) \quad (48)$$

$$276 \quad \overrightarrow{OO_2} = (x_0 - \rho_2 \sin\beta_2, y_0 - \rho_2 \sin\beta_2)$$

$$277 \quad = \left(\rho_2 \frac{\sin\theta_2 + \theta_2 \cos\theta_2}{\sqrt{\theta_2^2 + 1}} - \alpha\theta_2 \cos\theta_2, \rho_2 \frac{\theta_2 \sin\theta_2 - \cos\theta_2}{\sqrt{\theta_2^2 + 1}} - \alpha\theta_2 \sin\theta_2 \right) \quad (49)$$

278

279 接下来考虑展开优化方程，即在直径 $9m$ 调头区内路径的总长。蚊香线进出调头
 280 区点坐标可由方程(30)解得，展开方程(5)的积分，可得龙头在调头区内的螺线行程
 281 为：

$$282 \quad \Omega_1 = \int_{t_{01}}^{t_1} v dt + \int_{t_2}^{t_{02}} v dt = \alpha \left(\int_{\theta_{01}}^{\theta_1} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta + \int_{\theta_2}^{\theta_{02}} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta \right)$$

$$283 \quad = \alpha \left[\left(\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right) \Big|_{\theta_{01}}^{\theta_1} + \left(\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right) \Big|_{\theta_2}^{\theta_{02}} \right] \quad (50)$$

284 而对于圆弧的长度计算，可以如图 9 所示在绝对直角坐标系下求解其角度值，
 285 记切入点和切出点分别为 P_1 和 P_2 ，中间切点为 S ，则有各圆曲率半径所在直线的倾
 286 角：

$$287 \quad \phi_{P_1 O_1} = \arctan \frac{y_{O_1} - y_{P_1}}{x_{O_1} - x_{P_1}} \quad (51)$$

$$288 \quad \phi_{O_1 S} = \arctan \frac{y_S - y_{O_1}}{x_S - x_{O_1}} \quad (52)$$

$$289 \quad \phi_{S O_2} = \arctan \frac{y_{O_2} - y_S}{x_{O_2} - x_S} \quad (53)$$

$$290 \quad \phi_{O_2 P_2} = \arctan \frac{y_{P_2} - y_{O_2}}{x_{P_2} - x_{O_2}} \quad (54)$$

291 由几何关系可得：

$$292 \quad \epsilon_1 = \begin{cases} \phi_{O_1 S} - \phi_{P_1 O_1}, \phi_{O_1 S} - \phi_{P_1 O_1} > 0 \\ \phi_{O_1 S} - \phi_{P_1 O_1} + 2\pi, \phi_{O_1 S} - \phi_{P_1 O_1} < 0 \end{cases} \quad (55)$$

$$\epsilon_2 = \begin{cases} \phi_{SO_2} - \phi_{O_2P_2}, \phi_{SO_2} - \phi_{O_2P_2} > 0 \\ \phi_{SO_2} - \phi_{O_2P_2} + 2\pi, \phi_{SO_2} - \phi_{O_2P_2} < 0 \end{cases} \quad (56)$$

294 则圆弧行程为:

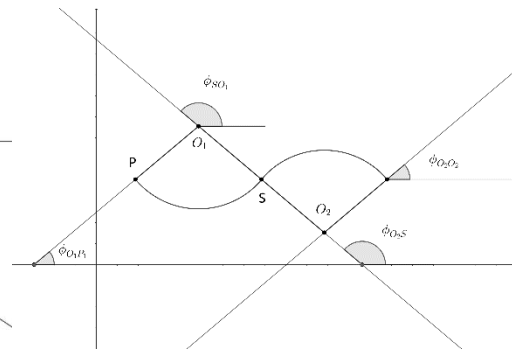
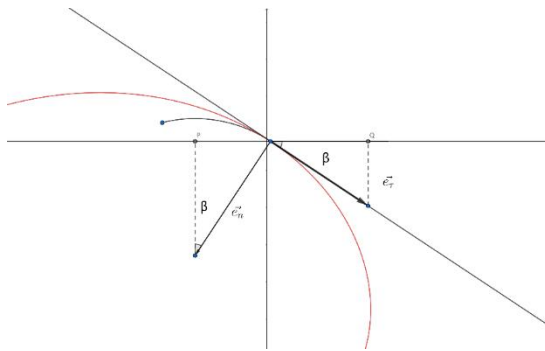
$$\Omega_2 = \rho_1 \epsilon_1 + \rho_2 \epsilon_2 \quad (57)$$

296 则待优化方程, 即总行程表示为:

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$$

$$= \alpha \left[\left(\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right) \Big|_{\theta_{01}}^{\theta_1} + \left(\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right) \Big|_{\theta_2}^{\theta_{02}} \right]$$

$$+ \rho_1 \epsilon_1 + \rho_2 \epsilon_2 \quad (58)$$



300

301 图 8: 曲率中心坐标推导示意

图 9: 圆弧转角的推导示意

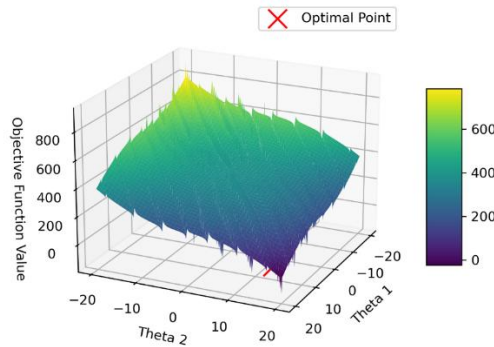
302 由于约束条件及目标方程均较为复杂, 采取 SLSQP (顺序二次规划) 算法在
303 Python 中编译求解程序进行优化, 算法结构如下所示; 优化所得解的分布如图 10 所
304 示。取总路程的最小值为 **13.621m**, 此时 $\theta_1 = \theta_2 = 16.632$ 。则在题给调头空间
305 内, 总路程无法再在此基础上缩短。

算法 2: SLSQP 算法

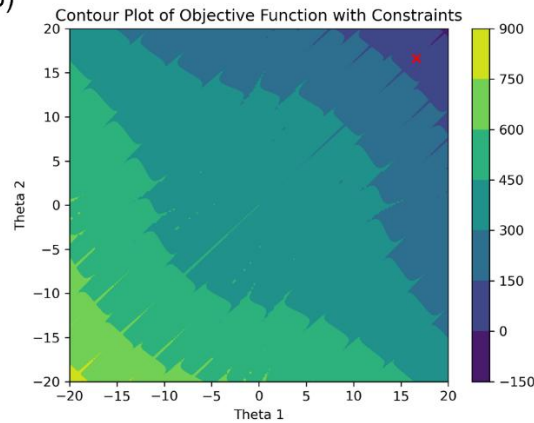
- 1: 给定 $x_0 \in R^n$, $\lambda_0 \in R^m$, $\lambda_0 \geq 0$, H_0 是 $n \times n$ 的正定矩阵, $r_0, \epsilon_0, \epsilon$ 是正常数,
 β 为非负常数, $0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 < 1$, $\gamma_1 > 0$, $1 > \gamma_2 > 0$, $k := 0$;
- 2: 解 $QP(x_k, \lambda_k, H_k)$ 。设 d_k^1 是其解。如果 $\|d_k^1\|$, 算法停止;
- 3: 令 $\hat{I}_k = i \in I_0 \setminus \{i \in J_k, \lambda_k, \epsilon_k\} : \nabla c_i(x_k)^T \cdot d_k^1 < 0$, 计算 $\delta_k = \min_{i \in \hat{I}_k} \frac{-c_i(x_k)}{\nabla c_i(x_k)^T \cdot d_k^1}; 1\}$, 令 $d_k = \delta_k d_k^1$;
- 4: 计算 $\Delta(x_k)$ 。若 $\Delta(x_k) = 0$ 或 $g(x_k)^T d_k + r_k \Delta(x_k) \leq -d_k^T H_k d_k$, 置 $r_{k+1} = r_k$, 跳
转第 5 行; 否则置 $r_{k+1} = \max \frac{g(x_k)^T d_k + d_k^T H_k d_k}{-\Delta(x_k)}, 2r_k + \beta$;

- 令 $\theta(x_k, r_{k+1}) = g(x_k)^T d_k$ ，选择 α_k 满足 $p(x_k + \alpha_k d_k, r_{k+1}) \leq p(x_k, r_{k+1}) + \sigma_1 \alpha_k \theta(x_k, r_{k+1})$ ，且对于满足 $\alpha_k \geq \gamma_1$ 或存在 $\bar{\alpha}_k > 0$ ，满足 $\alpha_k \geq \gamma_2 \bar{\alpha}_k > 0$ ，都使得 $p(x_k + \alpha_k d_k, r_{k+1}) > p(x_k, r_{k+1}) + \sigma_2 \alpha_k \theta(x_k, r_{k+1})$
- 6: 置 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ ，取 $\lambda_{k+1}^{(i)} = 0$ ， $i \in I_{0 \setminus I}(x_k, \lambda_k, \epsilon_k)$ ；根据拟牛顿公式计算 H_{k+1} ；产生 ϵ_{k+1} ；置 $k = k + 1$ ，跳转第一行。
-

(a)



(b)



306

307 图 10: 目标方程解的分布: (a)目标方程的解的三维分布; (b)目标方程的解的平面映射。

308 进一步地，我们考虑对优化得到的调头轨迹进行位置和运动的分析。由于此时
 309 的轨迹较为复杂，放弃如 5.2 中对位置和速度通过迭代公式求解析解，直接求数值
 310 解，运动解析算法如下所示。

算法 3: 运动解析算法

- 1: 输入: 曲线轨迹与采样间隔 h
- 2: 遍历时间序列 $T(t_{\{01\}}, t_{\{01\}} + h, \dots, t_{\{02\}})$ ，记录每一时刻的龙头位置点 (x_i, y_i) ;
- 3: 遍历龙头位置 $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i)\}$;

- 4: 循环: 取位置坐标 (x_j, y_j) 与 (x_k, y_k) , 令 $k = j - 1$, 记录把手位置序号 $n = 1$;
- 5: 循环: 求两点距离 $d_j = \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2}$;
- 6: 判断 $d_j = D$ 是否成立, 若否, 取 $k = \min(k - 1, 0)$, 跳转第 5 行运算; 否则跳转第 7 行;
- 7: 判断 $n = 223$ 是否成立, 若否, 取 $j = k$, $n = n + 1$, 跳转第 4 行运算; 否则退出循环, 跳转第 8 行
- 8: 利用碰撞检测算法对当前运动状态是否存在碰撞进行判断, 若存在, 则直接输出: “此路径存在碰撞, 需重新优化”; 否则跳转第 9 行;
- 9: 遍历时间序列 $T(t_{\{01\}}, t_{\{01\}} + h, \dots, t_{\{02\}})$;
- 10: 遍历此时刻除龙头外所有节点位置 $S_{i\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{223}, y_{223})\}}$;
- 利用数值微分求解每一节点在该时刻速度, 有:
- 11:
$$v_i = \sqrt{\frac{(x_t - x_{t-\Delta t})^2 + (y_t - y_{t-\Delta t})^2}{\Delta t}}$$
;
- 12: 输出: 所有采样时刻板凳龙所有节点的位置和速度。

311 通过该算法可以得到优化结果下任一采样时刻的板凳龙位置及速度分布, 部分
 312 结果如表 4 和表 5 所示。为保证可以顺利调头, 在此条件下继续套用 5.3 中给出的碰
 313 撞判定模型进行遍历, 确定无碰撞, 至此可以确定该方案可行。优化轨迹以及板凳
 314 龙在该轨迹上的运动过程如图 11 所示。

315 表 4:问题四所求部分节点位置表

	-100s	-50s	0s	50s	100s
龙头 x(m)	7.778034	6.608301	-2.719449	1.332696	-3.157229
龙头 y(m)	3.717164	1.898865	-3.584570	6.175324	7.548511
第 1 节龙身 x(m)	6.203945	5.366738	-0.072189	3.858823	-0.340846
第 1 节龙身 y(m)	6.114279	4.475629	-4.670260	4.843826	8.079221
第 51 节龙身 x(m)	-10.587957	-3.737348	2.243075	-1.912438	1.904737
第 51 节龙身 y(m)	2.899106	-8.915988	-7.835701	-5.993723	4.141336
第 101 节龙身 x(m)	-11.963597	10.029829	3.305055	-7.353713	-7.146728

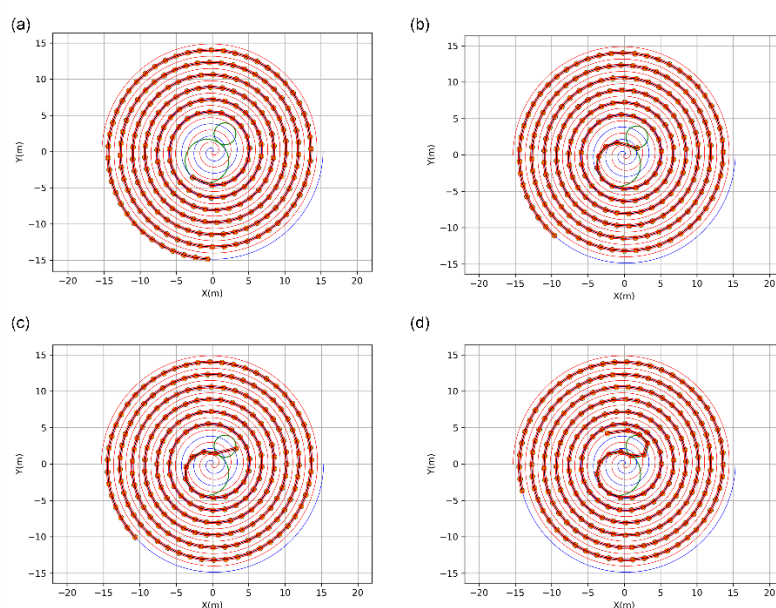
第 101 节龙身 y(m)	-4.693001	-6.124104	10.007029	5.489190	2.465682
第 151 节龙身 x(m)	-14.367777	12.907051	-6.693894	-5.019840	9.251849
第 151 节龙身 y(m)	-1.833951	-4.019096	10.530776	-10.180752	-4.023838
第 201 节龙身 x(m)	-11.838568	10.342333	-6.519279	-0.169541	8.919563
第 201 节龙身 y(m)	10.690716	-10.973925	12.563798	-13.170426	8.177398
龙尾（后）x(m)	-1.185553	0.443347	-2.337136	6.322032	-11.273123
龙尾（后）y(m)	-16.513105	15.711113	-14.646898	12.375970	-6.244018

316

317

表 5:问题四所求部分节点速度表

	-100s	-50s	0s	50s	100s
龙头(m/s)	0.999994	0.999991	0.899966	0.999990	0.999994
第 1 节龙身(m/s)	0.999995	0.999991	0.999981	0.999989	0.999994
第 51 节龙身(m/s)	0.999997	0.999996	0.999994	0.999989	0.999980
第 101 节龙身(m/s)	0.999997	0.999997	0.999996	0.999995	1.389980
第 151 节龙身(m/s)	0.999998	0.999998	0.999997	0.999997	1.389989
第 201 节龙身(m/s)	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	1.399992
龙尾（后）(m/s)	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	1.389993



318

319

图 11: 最优轨迹运动模拟: (a)~(d)板凳龙在最优轨迹上的运动过程示意。

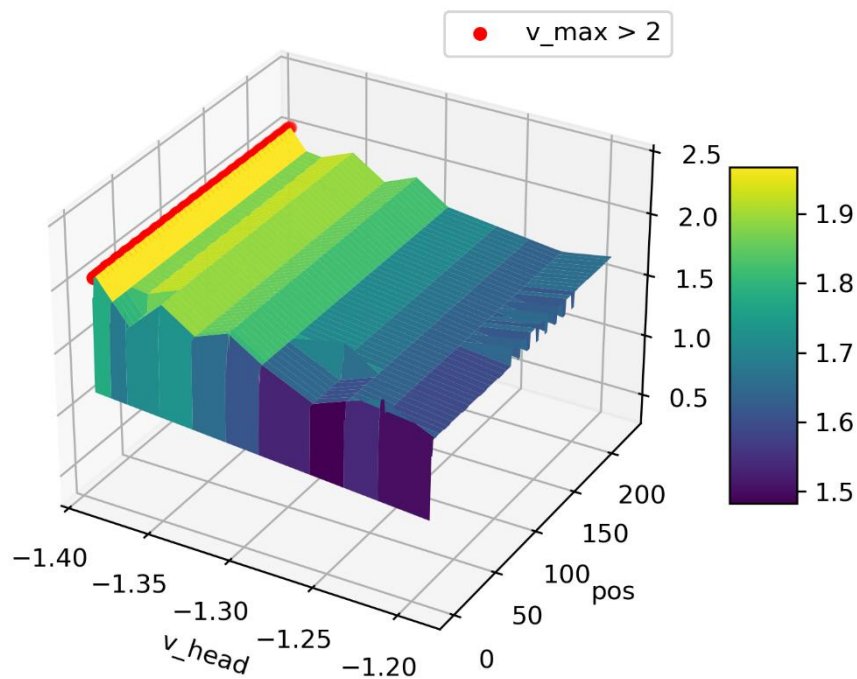
320 5.6. 问题五模型的建立与求解

321 在 5.6 中已经通过数值方法给出了调头过程中的速度分布。该分布是一个数值解
322 而非解析解，取时间步 $\Delta t = 0.05$ ，则速度为：

323
$$v_i = \sqrt{\frac{(x_t - x_{t-\Delta t})^2 + (y_t - y_{t-\Delta t})^2}{\Delta t}} \quad (59)$$

324 其中 (x_t, y_t) 是从曲线上采样得来。

325 数值解无法从代数解析层面进行优化。因此考虑使用网格搜索算法对全局状态进
326 行搜索，从而获取一个大致范围。可以看到，在大致范围内，存在有部分的值是大于
327 2m/s 的，对该部分所对应的网格领域进行进一步的二分迭代搜索，效果如图 12 所示。
328 可以得到最终的**最大龙头速度**约为 **$v_{max} = 1.384527 \text{ m/s}$** 。



329

330

图 12：二分搜索网格效果图

331

332

6. 模型的分析与检验

333

6.1. 对位置与速度迭代关系的验证

334

为避免 5.3 中对位置和速度的迭代关系推导出现逻辑和计算纰漏，我们利用微分

335

数值方法补充求解几组速度结果并与解析法得到的结果相比较。数值计算时，利用得

336

到的各点位置坐标对时间进行数值微分，公式如下：

337

$$v_i = \sqrt{\frac{(x_t - x_{t-\Delta t})^2 + (y_t - y_{t-\Delta t})^2}{\Delta t}} \quad (60)$$

338

339

计算两种方法所得到的结果的均方误差（MSE），公式如下：

340

$$\delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2 \quad (61)$$

341

计算结果如图 13 所示，这里计算了两种方法结果依据时间 t 和依据板子编号

342

position 上的 MSE, 注意到两种方法得到的结果差距极小(低于 $1e-5$ 数量级)。且发现，

343

在微分法中，随着微元步长的逐渐缩小，数值微分法的结果逐渐收敛至解析解的速度

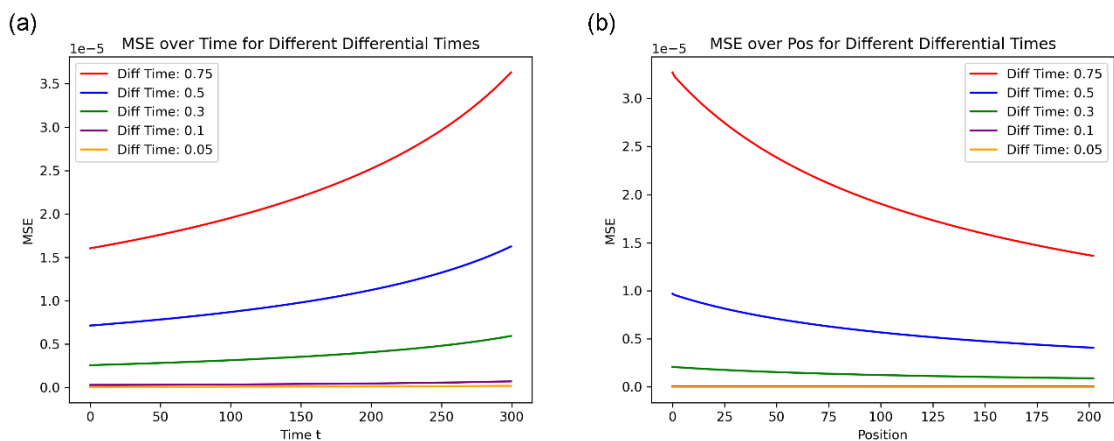
344

结果，由此可以说明利用推导出的速度递推解析式方法计算的正确性，同时解析法相

345

较于微分数值法更加精确和高效。

346



347

348

图 13: 解析法求解速度与微分法求解速度在不同时间及不同板上的均方误差

349

376 3. 数值算法和程序协同实现可视化，清晰美观

377

378 7.2. 模型的缺点

379 1. 模型的分析与检验较为薄弱

380 2. 模型中运用了较多的数值方法，而对不同数值方法的误差及稳定性检验较为确

381 实

382

383 7.3. 模型的改进

384 1. 模型中主要以数学和几何关系作为推导依据，较少涉及刚体等物理条件。可以
385 考虑添加此部分分析来补充模型，提高模型可信度。

386 2. 实际编程中发现所采用的算法中还存在较多奇点和条件判断，篇幅限制，模型
387 中并未表述清晰。

388

389 7.4. 模型的推广

390 模型主要涉及三部分内容：位置与运动的分析、碰撞的检测、以及路径的非线性
391 优化。我们分别对其推广作讨论。

392 对于位置及运动的分析部分，我们采取了两种策略求解：第一种为抽象几何元素
393 解析迭代关系；第二种为数值方法求解。前者适用范围较窄，对于每一种具体情况都
394 需要重新推导其几何和迭代关系，但是精度和可信度较高；而后者的精度依赖于具体
395 的数值算法和算力，但是其算法适用范围较为广泛，就板凳龙问题而言，对于任何行
396 进规矩，均可使用 5.5 中给出的算法 3 得到一定精度下的数值解。

397 对于碰撞检测部分，前文已经点明我们在进行分析和算法搭建时未引入任何特殊
398 假设，即该碰撞检测算法可以利用于任何相似几何的碰撞检测上。若所检测几何并非
399 矩形，可以考虑依据其特征对算法中涉及的集合 M 作简单修改，其他算法逻辑仍然适
400 用。

401 对于路径的非线性优化，我们采用了 SLSQP（顺序二次规划）算法进行解答。该
402 算法广泛适用于各种非线性约束问题，其优点包括收敛速度快、数值性质良好等。对

403 于除此问题以外的其它非线性约束，均可使用该算法及其衍生改进算法进行求解。

404

405

406

8. 参考文献

407 [1] 同济大学应用数学系, 《高等数学》(第六版, 上册) [M].北京:高等教育出版社,
408 2007年.

409 [2] 董铸九,董卫东.阿基米德螺线平板凸轮加工误差分析与工艺改进措施[J].现代车用
410 动力,1994,(02):45-49.

411 [3] 占海明. MATLAB 数值计算实战[M]. 北京: 机械工业出版社, 2017

412 [4] 石国春. 关于序列二次规划(SQP)算法求解非线性规划问题的研究[D]. 兰
413 州: 兰州大学, 2009